2018

MATERIAL DE APOYO

ÁREA: MATEMÁTICA

1° Parte

Función. Dominio, imagen, fórmula.
Números Reales. Operaciones y propiedades.
Gráficos. Crecimiento, decrecimiento; máximos, mínimos.
Unidades de medida. SI.ME.L.A.

PROGRAMA ARTICULATORIO

Y ahora… algo de historia…

Los problemas de repartos han dado origen a numerosos ejercicios de ingenio. Uno de los pueblos que se distinguió por este tipo de problemas fue el árabe, en parte porque su religión establece minuciosamente cómo deben efectuarse los repartos de herencia. No es extraño que los árabes hayan propuesto interesantes problemas de herencias!

He aquí uno:

Un camellero al morir deja a sus tres hijos 23 camellos para repartir de la siguiente manera: al mayor la mitad, al mediano la cuarta parte y al menor la sexta parte. Como el número no les permite efectuar el reparto y cada uno quiere llevar más de lo que le corresponderá, deciden llamar en su auxilio al anciano de la tribu.

Éste resuelve el problema así:

Les presto un camello, con el que sumamos ahora 24. La mitad de 24 es 12. ¿Te conformas?
El mayor, que sabe que la mitad de 23 es menor que 12, acepta alborozado.
A ti te entregamos la cuarta parte de 24, o sea 6 ¿Contento?
El mediano también se alegra. La cuarta parte de 23 es menor que 6.
- Y por último a ti te damos la sexta parte de 24, o sea 4. Antes te hubiese correspondido la sexta parte de 23 que es menor que 4.
Resumiendo, 12 al mayor, 6 al mediano y 4 al menor suman 22. Tomo el camello que os presté y el restante me lo quedo por haber resuelto la disputa.

1. ***¿Podrías tú explicar este misterioso reparto?***

Otro de reparto:

¡Aquí están mis tres amigos! Son criadores de carneros y vienen de Damasco. Se les plantea ahora uno de los más curiosos problemas que haya visto en mi vida. Es el siguiente: como pago de un pequeño lote de carneros recibieron aquí en Bagdad, una partida de vino excelente, envasado en 21 vasijas, de las cuales se hallan 7 llenas, 7 por la mitad y 7 vacías.

Quieren ahora repartirse las 21 vasijas de modo que cada uno reciba el mismo número de vasijas y la misma cantidad de vino.

Repartir las vasijas es fácil, cada uno se quedará con 7, la dificultad está en repartir el vino sin abrir las vasijas, dejándolas exactamente como están.

¿Será posible-¡Oh Calculador!- hallar una solución satisfactoria a este problema?

2. ***Encuentre la solución a este problema***

Por definición popular, aunque no muy exacta, un matemático es un individuo especialista en números. En estos primeros temas vamos a desarrollar el gusto por ellos y sus propiedades. Para empezar, aquí tienes unos problemas interesantes, por lo armonioso, lo sorprendente o lo mágico.

Escoge un número de tres cifras y forma otro repitiendo el primero. Por ejemplo:

234 234

Divide este número entre 7, después entre 13 y, por último entre 11.

Obtienes tu número inicial, ¿verdad?

3. ¿***Por qué***?

Se cuenta que el inventor del ajedrez pidió al rey Sirham de la India el trigo que se consiguiera poniendo un grano en el primer cuadrado del tablero, dos en el segundo, cuatro en el tercero, ocho en el cuarto y así sucesivamente hasta completar los 64 cuadrados del tablero de ajedrez.

a) ¿Cuántos granos de trigo habría que poner en el último cuadrado?
b) ¿A cuántos años de producción mundial de trigo correspondería aproximadamente?

4. ***Responde a las dos preguntasanteriores***

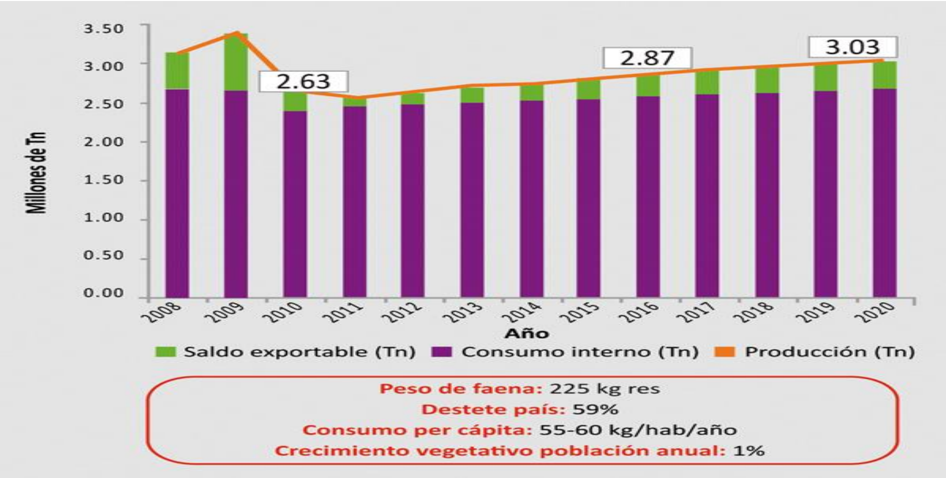
- Piensen un número entero distinto de 0, por ejemplo, el 10.
- Súmenle el sucesor. $10 + 11 = 24$
- Cuadripliquen el resultado. $21 \,.\, 4 = 84$
- Resten 4 $84 - 4 = 80$
- Dividan por el número que pensaron al comienzo. $80 : 10 = 8$

Repitan la experiencia anterior con otros números: ¡siempre obtendrán 8!

5. *¿Por qué el número entero que proponen debe ser distinto de 0*?

Se selecciona el tema función ya que es unificador en la matemática y con gran potencial modelizador de situaciones del mundo real. Por lo tanto se lo utiliza como concepto estructurante de la organización de los contenidos matemáticos del curso que nos ocupa.

Este gráfico corresponde a un trabajo sobre la “Evolución de la producción de carne vacuna a nivel país manteniendo las tasas actuales” presentado por un grupo de estudio al Seminario “La Integración para el Desarrollo Ganadero” llevado a cabo en el Auditorio San Agustín de la Universidad Católica Argentina, el 24 de agosto de 2011.[1]



Los conceptos que contiene los estudiarás a partir de este curso y en las próximas materias relacionadas con la Matemática.

[1] Autor: Coordinador: Dr. Carlos Pacífico – Tutores: Dr. Fernando Gil y Dr. Federico Santángelo. Pasantes: Maricel Bernardino, Alejandro Sáez Reale, Gastón Dana y Juan Manuel Ponte.

Funciones

El precio del transporte es función del precio del petróleo.

El espacio recorrido es función de la velocidad.

La presión atmosférica es función de la altura.

El número de vacas de la Provincia de Buenos Aires es función del tiempo.

Expresiones semejantes, que puedes oír todos los días, ilustran bastante bien lo que es una función en Matemática. Las de arriba significan que:

- a cada precio del petróleo le corresponde un precio del transporte (supuestas iguales otras circunstancias que pueden influir).
- a cada velocidad corresponde un espacio recorrido (en un intervalo de tiempo determinado).
- a cada altura le corresponde una presión atmosférica.
- a cada año le corresponde un número de vacas en la Provincia de Buenos Aires.

A esta asignación se la llama ***función.*** El conjunto de elementos a los que se le asigna algo se llama conjunto de definición de la función. El conjunto de esos ***algos*** que se les va asignando a cada elemento se llama conjunto de valores de la función.

- Ejemplo

  Tanto la gente que vive en las ciudades ubicadas a miles de metros de altitud, como las personas que van de campamento a la montaña, pueden observar que el agua cuando hierve no está tan caliente como cuando lo hace a nivel del mar, y que la comida tarda más en cocinarse.


Altitud (m)	Temperatura de ebullición del agua (^{0}C)	Tiempo de cocción (min)
Nivel del mar	100	1
1525	95	1,9
3050	90	3,8
4575	85	7,2
7000	80	13

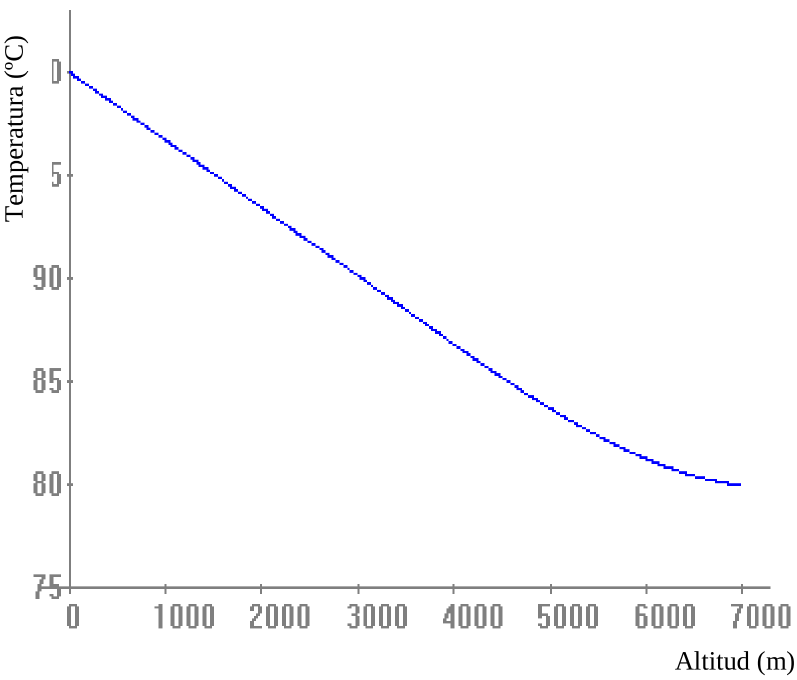
En esta situación, se estudia la relación entre los valores de la altitud y los de la temperatura de ebullición del agua, a partir de una tabla que contiene datos experimentales.

La tabla muestra que al aumentar la altitud decrece la temperatura de ebullición del agua y aumenta el tiempo de cocción.

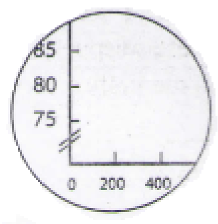
Se puede observar, además, que cada vez que la temperatura de ebullición del agua disminuye 5^{0}C casi se duplica el tiempo de cocción.

Esto significa, entre otras cosas, que cocinar la polenta "1 minuto" en un refugio de montaña ubicado a 3000 m. de altura, ¡lleva casi 4 minutos!

Si se quiere visualizar la forma en que varía la temperatura de ebullición del agua en función de la altitud, es conveniente representar los datos correspondientes en un gráfico cartesiano.



El gráfico muestra que, para los primeros datos que figuran en la tabla, la temperatura decrece linealmente al aumentar la altitud, pero luego el decrecimiento se vuelve más lento. Para indicar que se saltea parte de la escala se traza sobre el eje una doble raya.



Los datos experimentales se representan con puntos aislados; sin embargo, se presentan unidos por medio de una línea para visualizar mejor la tendencia de la curva. Al unirlos de esa manera, se está suponiendo que la temperatura de ebullición decrece en forma suave, sin cambios bruscos.

Se desconocen los valores de la temperatura en los puntos intermedios, pero se pueden estimar a través del gráfico.

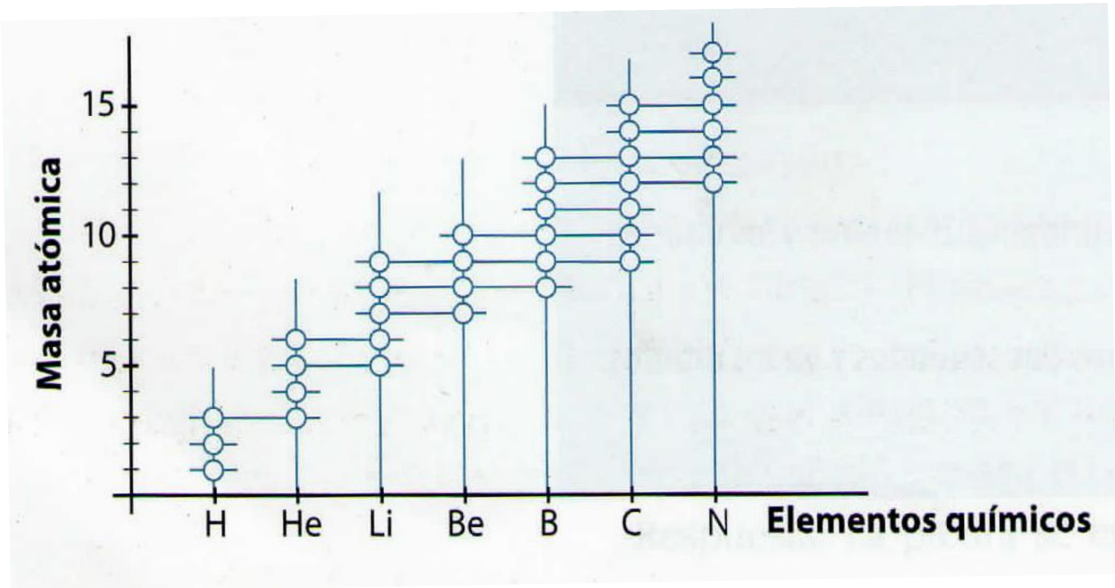
Para describir una relación entre dos variables ***x*** e ***y***, utilizando una función, es necesario encontrar una ***ley*** que asigne a cada valor de ***x*** (***variable independiente***), un único valor de ***y*** (***variable dependiente***).

Resulta, entonces, que para describir una relación entre variables es necesario, además de dar la ley de correspondencia, dar los conjuntos en que pueden tomar sus valores.

Ejemplo

Sea $A = \{hidrógeno\ (H), helio\ (He), litio\ (Li), berilio\ (Be), boro\ (B), carbono\ (C), nitrógeno\ (N)\}$, el conjunto de los 7 elementos químicos ordenados de acuerdo con su número atómico; y sea $N = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$, el conjunto de masas atómicas (redondeadas a números enteros).

En el siguiente gráfico están representados (con círculos) los isótopos de los primeros 7 elementos.

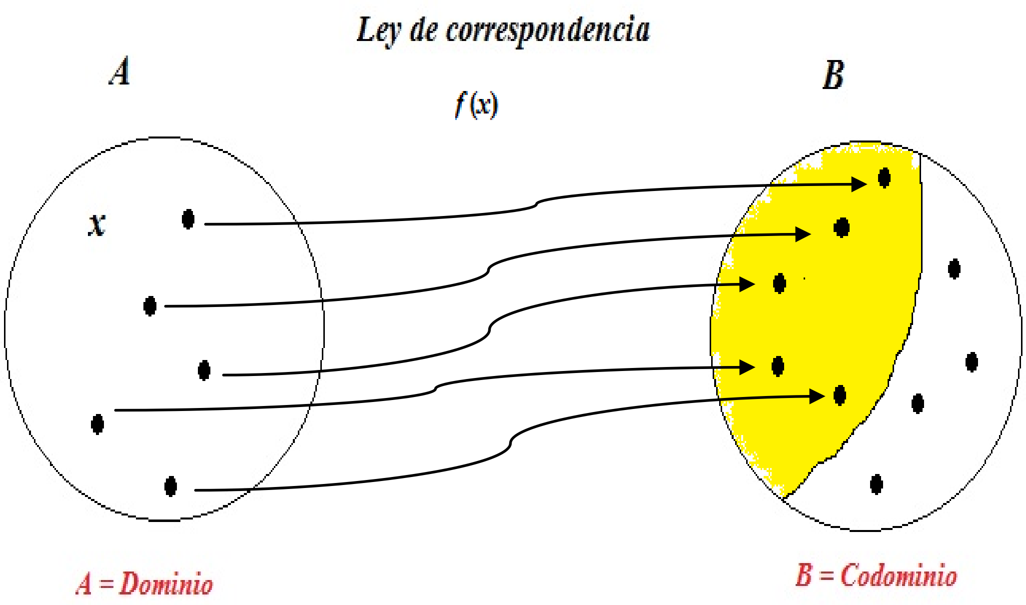


Se puede observar que cada isótopo de un mismo elemento tiene una masa atómica diferente (por el aporte de la masa de neutrones, que es distinta en cada caso). En consecuencia, a cada elemento le corresponde más de un valor de masa atómica, según el isótopo que se considere. Por ejemplo, el helio tiene tres isótopos de masas 1, 2 y 3, es decir, que le corresponden estos tres valores de masa.

Esta relación no es función, ya que por lo menos a algún elemento del eje de las ***x*** le corresponde más de uno del eje de las ***y***.

Una función ***f*** queda determinada por:

- Un conjunto A llamado ***dominio***.
- Un conjunto B llamado ***codominio***.
- Una ley que asocia a cada elemento ***x*** del conjunto A un ***único*** elemento ***y*** del conjunto B.



Esta definición incluye conjuntos de elementos cualesquiera, numéricos o no numéricos, y abarca tanto la ley de correspondencia como los conjuntos en los que toman sus valores las variables.

De acuerdo con esta definición, dos funciones son iguales si coinciden su dominio, su codominio y la ley de correspondencia que relaciona los elementos de ambos conjuntos.

El ***dominio*** de una función $\boldsymbol{f}$ es el conjunto formado por todos los valores que toma la variable independiente $\boldsymbol{x}$ y se simboliza Dom (f) o Dom f.

El ***codominio*** de una función $\boldsymbol{f}$ es un conjunto que contiene a todos los valores que puede tomar la función.

Cada elemento $\boldsymbol{y}$ que está asociado a un elemento $\boldsymbol{x}$ del dominio de $\boldsymbol{f}$, se llama ***imagen de x*** y se escribe $f(x)$ (se lee "efe de $\boldsymbol{x}$").

El conjunto formado por todas las imágenes de los elementos del dominio de $\boldsymbol{f}$ se llama ***imagen de f*** y se simboliza Im (f) o Im f. Observemos que la imagen está contenida en el codominio.

Para designar una función f que tiene dominio A *y codominio* B*, se utiliza generalmente la siguiente notación*

$$f : A \to B$$

Las funciones que más nos van a interesar en Matemática son aquéllas que asignan a cada número de un cierto conjunto de números otro número. Son las ***funciones numéricas.*** Es decir, el conjunto de definición es un conjunto de números y el conjunto de valores es también un conjunto de números.

Si a cada número real $\boldsymbol{x}$ le asignamos su doble, es decir $2x$, lo podemos expresar simbólicamente de varias maneras:

1) $x \xrightarrow{f} 2x$
2) $f \to f(x) = 2x$

Actividad de aprendizaje

1. En veinte ratones de laboratorio, numerados del 1 al 20, se realiza un test para saber si reaccionan a cierta dosis de un nuevo antibiótico. Al ratón que reacciona positivamente, se le asocia el número 1 y al que reacciona negativamente, el 0. Realiza un diagrama como el de la página anterior ejemplificando una de las posibles respuestas al test y luego contesta.

Esta correspondencia:

a) ¿Es función?
b) ¿Cuál es su dominio e imagen?
c) ¿Es una función numérica?

Observación:

En este material se estudiarán funciones con dominio igual al ***conjunto de los números reales*** (R) o a un subconjunto del mismo, y con codominio igual a R.

Números reales

Haremos una revisión de las operaciones y propiedades.

¿Qué es un número real?

El conjunto de los números reales tiene como elementos a los números racionales y a los números irracionales.

Recordemos la

Clasificación de los números

Naturales $(1, 2, 3, \cdots)$

El cero

Enteros negativos $(\cdots, -3, -2, -1)$

Enteros

Fraccionarios $\left(\frac{2}{5}, -\frac{3}{7}, \cdots\right)$

Racionales

Irracionales $\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e, \cdots\right)$

Reales

Imaginarios $\left(\sqrt{-1}, \sqrt{-4}, \cdots\right)$

COMPLEJOS

Actividad de aprendizaje

2. Tache los números que no correspondan a la clasificación:

<u>Naturales</u>: $0;\ -1;\ \frac{1}{4};\ -0{,}8;\ 2;\ 2\sqrt{2};\ 1{,}131133111\ldots;\ \frac{9}{3}$

<u>Enteros</u>: $-4;\ \frac{5}{2};\ 0;\ \pi;\ -0{,}2;\ \frac{7}{4};\ 2{,}6;\ -1{,}5$

<u>Racionales</u>: $-4;\ \frac{5}{2};\ 0;\ 2{,}23;\ 1{,}8888888\ldots;\ -\sqrt{5};\ \pi;\ 2;\ -1{,}5;\ \sqrt[3]{7}$

<u>Irracionales</u>: $4;\ -31;\ 2{,}21212121\ldots;\ \pi;\ 7{,}2;\ 7{,}212223242526\ldots;\ 2\sqrt{2};\ 2\sqrt{5}$

- Faltan 38 días para finalizar las clases, decimos que marzo es el tercer mes del año, que éste es el 6to. año que concurro a la Escuela Secundaria, …

Los números naturales sirven para contar, ordenar, …

- Un saldo en el banco de $-\ \$\ 1500$, quiere decir que se deben $\$\ 1500$.
- En una ciudad la temperatura aumentó 10° C y la actual es de 8° C. ¿Cuál era la temperatura anterior?

2° bajo cero ó -2°C?

- -2 ***es un número entero negativo,*** $-2 \in Z^{-}$

Recordemos que $Z^{-} \cup Z^{+} = Z$ es el conjunto de los ***números enteros***.

- En Meteorología, se llama amplitud térmica de un día a la diferencia entre las temperaturas máxima y mínima de ese día.
  - Si la máxima fue de -5℃ la mínima de -11℃ , entonces la amplitud térmica de ese día es:

$$-5℃ - (-11℃) = -5℃ + 11℃ = 6℃$$

  - En una ciudad, la temperatura aumentó 9°C y la actual es de 6°C. ¿Cuál era la temperatura anterior?

    Llamamos ***x*** a la temperatura anterior:

$$x + 9℃ = 6℃$$

$$x = 6℃ - 9℃$$

$$\boxed{x = -3℃}$$

La temperatura anterior era de 3°C bajo cero.

Pero los números, además de para expresar cantidades y medidas sirven para operar con ellos, es decir, para calcular ciertas cantidades a partir de otras conocidas: ésta es la mayor de sus ventajas.

¿Cómo es tu calculadora?

Efectúa: $$2 + 6\,.\,5 = \begin{cases} 40 \\ 32 \end{cases}$$

1) Si el resultado es 40, significa que ha operado: $(2 + 6)\,.\,5 = 40$

   Es decir, que realiza las operaciones en el orden dado.

2) Si realiza $2 + (6\,.\,5) = 2 + 30 = 32$

   Significa que multiplica primero y suma después.

   Si es del tipo 1) debes hacer uso de las memorias.

PARA PENSAR…

a) ¿Cuántos árboles colocará en total el jardinero?

b) ¿Cuál será la distancia entre dos árboles consecutivos?

6. ***¿Qué conceptos utilizaste para resolver esta situación*?**

Se quiere repartir equitativamente un terreno entre dos personas.

¿Puedes expresar con un número entero que parte corresponde a cada uno? …

Los números enteros no nos sirven para responder a esta pregunta. No podemos expresar con un ***número entero*** que a cada persona le corresponde la mitad del terreno. Para representar con números cualquier situación real, los números enteros no son suficientes. Aparecen así los ***números racionales***.

- 2,24 litros de hidrógeno, la altura es de 20,4 metros, la aceleración de la gravedad es de 9,8 m/seg^2.
- En muchas encuestas se usan las fracciones. La expresión "3 de cada 20 personas aún no han decidido por quién votar en las próximas elecciones" significa que hay 3/20 del total de personas encuestadas que aún no han decidido por quién votar. Además, corno 3/20 es una fracción equivalente a 15/100 podemos decir que el 15% de la población está indecisa.

Comparación de números reales

Si quieres comparar dos fracciones, podrás hacerlo a ojo en muchos casos. Por ejemplo, una fracción positiva será siempre mayor que una negativa; de dos fracciones que tengan el mismo denominador, será mayor aquella cuyo numerador sea mayor; etc. Pero cuando tengas duda, debes buscar otras fracciones equivalentes a las que quieres comparar y que tengan el mismo denominador. Bastará comparar sus numeradores.

- Ejemplos

$$a)\frac{3}{5}\ y\ \frac{4}{7} \qquad \frac{3}{5}=\frac{21}{35}\ ; \qquad \frac{4}{7}=\frac{20}{35}\ por\ lo\ tanto\ \ \frac{3}{5}>\frac{4}{7}$$

$$b)\frac{17}{12}\ y\ \frac{29}{20} \qquad \frac{17}{12}=\frac{85}{60}\ ; \qquad \frac{29}{20}=\frac{87}{60}\ por\ lo\ tanto\ \ \frac{17}{12}<\frac{29}{20}$$

7. ***¿Existe otra forma de hacerlo?***

Actividades de aprendizaje

2.1 Teniendo en cuenta que una pizza tiene 8 porciones, un mozo que atiende el mostrador de una pizzería debe saber qué significan en pizzas y porciones las siguientes cantidades despachadas una noche. Indícalo:

43/8 de pizza de mozzarella

15/4 de pizza de fugazza

7/4 de pizza de jamón y queso

22/8 de pizza de provolone.

a) ¿Qué clase de pizza se vendió menos?

b) ¿De cuál se vendió la mayor cantidad?

8. ***Explica con tus palabras como lo resolviste***

3. De los números:

$$\frac{-3}{-2};\ \frac{2}{3};\ \frac{-4}{3};\ \frac{-5}{7};\ -5;\ -\frac{-1}{-2};\ \frac{5}{4};\ \frac{5}{-6}$$

indica cuáles son:

a) menores que cero;

b) mayores que cero y menores que 1;

c) mayores que uno.

4. Germán e Ignacio son dos hermanos. Germán tiene $\frac{9}{20}$ de la edad de su padre e Ignacio $\frac{2}{5}$. ¿Cuál es mayor?

5. Tres recipientes contienen agua: el primero $\frac{50}{47}$ de litro, el segundo $\frac{62}{55}$ de litro y el tercero $\frac{33}{30}$ de litro. ¿Qué recipiente contiene menos agua y cuál más?

9. ***Explica con tus palabras como lo resolviste***

Simplificación de números racionales

Simplificar una fracción es sustituirla por otra equivalente. Esto se realiza cuando numerador y denominador se pueden dividir por un mismo número.

$$\frac{3}{60}=\frac{1}{20}; \qquad \frac{15}{12}=\frac{5}{4}; \qquad \frac{180}{120}=\frac{3}{2}$$

No es necesario que te esfuerces en hacer la simplificación total directamente. A veces es más fácil hacerla en varios pasos:

$$\frac{180}{120}=\frac{18}{12}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

Cuando una fracción no se puede simplificar más, se dice que es ***irreducible.***

$$\frac{5}{4};\ \frac{1}{20};\ \frac{3}{2};\ \frac{17}{20};\ \frac{16}{15}$$

Siempre que tengas una fracción con denominador negativo, debes cambiar el signo en el numerador y denominador:

$$\frac{7}{-3}=\frac{-7}{3}; \qquad \frac{-5}{-8}=\frac{5}{8}$$

Operaciones con fracciones

Se efectúan teniendo en cuenta las reglas siguientes:

1. El valor de una fracción no se altera si se multiplican numerador y denominador por un mismo número, distinto de cero:

$$\frac{3}{4}=\frac{3\,.\,2}{4\,.\,2}=\frac{6}{8} \qquad\qquad \frac{15}{18}=\frac{15:3}{18:3}=\frac{5}{6}$$

2. Si se cambia el signo del numerador, o el del denominador, de una fracción, ésta cambia de signo:

$$\frac{-3}{5}=-\frac{3}{5}=\frac{3}{-5}$$

3. La suma de dos fracciones del mismo denominador es igual a una fracción que tiene por numerador la suma de los numeradores y por denominador dicho denominador común:

$$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{3+4}{5}=\frac{7}{5}$$

4. La suma de dos fracciones de distinto denominador se efectúa como en 3., una vez que se hayan transformado las fracciones a un denominador común:

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{3}{12}+\frac{8}{12}=\frac{3+8}{12}=\frac{11}{12}$$

5. El producto de dos fracciones es otra fracción cuyo numerador es igual al producto de los numeradores y el denominador igual al producto de los denominadores:

$$\frac{2}{3}\,.\,\frac{4}{5}=\frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}=\frac{8}{15}$$

6. El recíproco de una fracción es la fracción cuyo numerador y denominador son, respectivamente, el denominador y numerador de la fracción dada. Así, pues, el recíproco de 3 (es decir, 3/1*)* es 1/3. Análogamente, los recíprocos de 5/8 y – 4/3 son 8/5 y – 3/4, respectivamente.

7. Para dividir dos fracciones se multiplica la primera por el recíproco de la segunda.

$$\frac{a}{b}:\,\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\,\frac{d}{c}=\frac{a\,.\,d}{b\,.\,c}$$

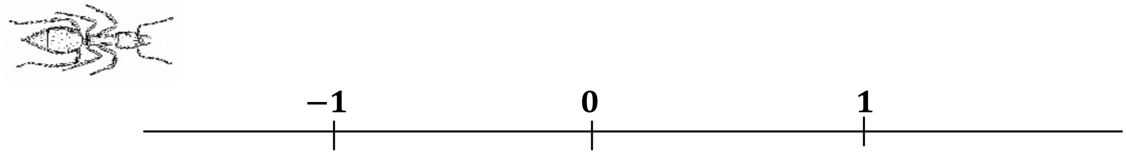
$$\frac{2}{3}:\,\frac{4}{5}=\frac{2}{3}.\,\frac{5}{4}=\frac{2\,.\,5}{3\,.\,4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

El resultado se puede expresar como sigue:

$$\frac{a}{b}:\,\frac{c}{d}=\frac{{}^{a}/_{b}}{{}^{c}/_{d}}=\frac{{}^{a}/_{b}\;\;b\,.\,d}{{}^{c}/_{d}\;\;b\,.\,d}=\frac{a\,.\,d}{b\,.\,c}$$

Actividades de aprendizaje

6. La pasión de la hormiga verde por los números racionales la llevó a construirse una recta numérica por la que camina, ida y vuelta, todo el día.



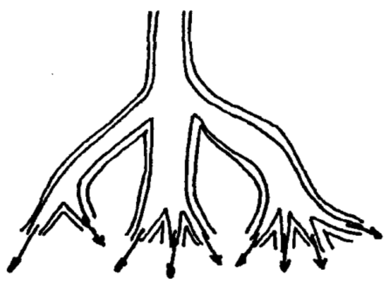
Completa la tabla correspondiente a distintas trayectorias realizadas por la hormiga.

Comienza el trayecto	Camina sobre la recta	Se detiene en:
$-{}^{3}/_{5}$	${}^{2}/_{10}$ en sentido positivo	
	${}^{4}/_{3}$ en sentido positivo	$-{}^{1}/_{3}$
$-{}^{3}/_{5}$		0
${}^{3}/_{5}$		0

7. Se tienen dos botellas. La primera tiene $1\ \frac{3}{4}$ litros y la segunda, $\frac{7}{9}$ litros y, con el contenido de cada una, se llenan vasos de $\frac{1}{8}$ litros.

¿Cuántos vasos *más* se pueden llenar con el contenido de la primera botella que con el de la segunda?

8. Observa en el dibujo un sistema de distribución de agua para riego. La cantidad de agua que llega a cada ramificación se distribuye en partes iguales entre los ramales que se desprenden de esa ramificación.



¿Qué cantidad de agua saldrá por cada una de las bocas indicadas con flechas si:

a) entra 1 litro de agua;

b) entran 30 litros;

c) entran 3/4 litros.

El estudio de las propiedades de las operaciones con números, aporta métodos de cálculo más cómodos y eficaces. Este es el motivo por el que se le dedica tanta atención y trabajo.

Actividades de aprendizaje

9. La siguiente tabla resume algunas de las propiedades de los números reales. Completar los casilleros vacíos según corresponda a la organización de la misma.

Operación / Propiedades	Adición	Multiplicación
Conmutativa	$a + b = b + a$	
	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a.(b.c) = (a.b).c$
Elemento neutro	$a + 0 = 0 + a = a$	
Elemento inverso		Producto: $a\left({}^{1}/_{a}\right) = \left({}^{1}/_{a}\right)a = 1, a \neq 0$
		$a(b + c) = a.b + a.c$

10. Nombrar la propiedad de los números reales aplicada en cada ítem:

a) $2x + y = y + 2x$

b) $c\,.(a + b) = (a + b).c$

c) $(x + y) + 5z = x + (y + 5z)$

d) $2\,.(w + x) = 2w + 2x$

e) $3.(5x + 1) = 15x + 3$

f) $(xy)S = x(yS)$

g) $(x + a)(x + b) = (x + a)x + (x + a)b$

h) $a(x + y + z) = ax + ay + az$

Se propone trabajar principalmente la potenciación y sus propiedades. Las propiedades de la potenciación servirán como un recurso para comparar, sin necesidad de realizar todas las cuentas. Además se tratará el problema de cómo escribir un número decimal de diferentes maneras, usando potencias de 10. Entre estas maneras puede ser identificada la "notación científica", que es la utilizada por la calculadora para números muy grandes o muy pequeños. También se revisará el orden en los números reales.

Potenciación

Si a es un número real:

$$a^0 = 1, \quad si\ a \neq 0$$

$$a^1 = a$$

$$a^n = \underbrace{a\,.\,a\,.\,a\,.\cdots.\,a}_{n\text{ factores}} \qquad (n \in N)$$

Potencia de exponente negativo:

$$a^{-n} = \left({}^{1}/_{a}\right)^{n} \quad si\ a \neq 0$$

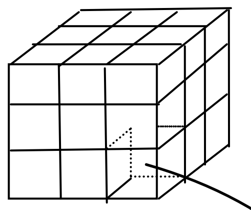
Potencia de exponente fraccionario:

$$a \in R, \quad a > 0; \quad {}^{m}/_{n} \in Q \ \ (m, n \neq 0) \qquad\qquad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Si a es un número real negativo esta definición tiene sentido si n es impar.

¿Por qué "cubo" de un número...?

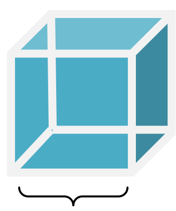
María quiere llenar una caja de forma cúbica con cajitas pequeñas, también de forma cúbica. Si con 3 cajitas cubre exactamente el ancho de la caja, ¿cuántas necesita para llenar toda la caja? Y si en el ancho caben 4 cajitas, ¿cuántas caben en este caso en la caja?



Observa la tabla de la derecha en la que indicamos la cantidad de cajitas que caben en el ancho y las necesarias para llenar la caja.

Para averiguar el total de cajitas necesarias para llenar la caja calculamos, en cada caso, una potencia de exponente 3.

Caben en el ancho	3	4	5	6	a
Llenan la caja	27	64	125	216	a^3



a

La potencia de exponente 3 de un número natural ***a*** puede pensarse como el volumen de un cubo de arista ***a***. Por eso, la potencia de exponente 3 de un número se llama también ***cubo de ese número***. Calcular la potencia de exponente 3 de ***a*** es lo mismo que ***elevar al cubo.***

Actividad de aprendizaje

11. Anotar en notación simbólica las siguientes ***propiedades de la potenciación***:

a) ***Producto de potencias de igual base***

…………………………………………………………………………………

b) ***Cociente de potencias de igual base***

…………………………………………………………………………………

c) ***Potencia de potencia***

…………………………………………………………………………………

d) ***Propiedad distributiva de la potenciación con respecto a la multiplicación***

…………………………………………………………………………………

e) ***Propiedad distributiva de la potenciación con respecto a la división***

…………………………………………………………………………………

Radicación

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \rightarrow b^n = a}$$

Actividad de aprendizaje

12. Anotar el nombre de cada propiedad

a) $\sqrt[n]{a\,.\,b\,.\,c} = \sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}\,.\,\sqrt[n]{c}$

b) $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} \quad con\ b \neq 0$

c) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

Ejemplo

Las preguntas de Don Pedro …

Don Pedro preguntó:

¿A ver muchachos, ¿qué es para ustedes $\sqrt{4}$?

2 $-$ dijo Irene.

-2 $-$ expresó simultáneamente Jorge.

$-$ ¿No ven? ¿no ven? No saben nada. ¿Es $\sqrt{4}$ un número?

$-$ ¡Son dos números! $-$ saltó Carlos.

Entonces... ¿por qué se dice que $\sqrt{2}$ es un número?

… …

Los muchachos preguntaron al profesor, quien les contestó:

Tienen ustedes razón, el símbolo $\sqrt{2}$ se emplea por abuso para designar tanto al número real positivo cuyo cuadrado es dos, como al real negativo cuyo cuadrado es dos. En nuestro curso, para evitar inconvenientes, convendremos que $\sqrt{2}$ designa al número ***real positivo*** cuyo cuadrado es 2. Su opuesto, lo simbolizaremos $\left(-\sqrt{2}\right)$. La misma convención para cualquier otro ***número irracional***.

Con la raíz cúbica, debe ser peor ... - se quejó Irene.

- No lo crean. Si lo piensan un poco lo resolverán - le contestó el profesor.

El conocimiento de algunas propiedades puede facilitar los cálculos, pero antes de aplicarlas, conviene analizar los posibles caminos. Veamos la siguiente igualdad:

$$(0{,}25\ .\ 4)^7 = 0{,}25^7\ .\ 4^7$$

¿Con cuál de los dos miembros trabajarías?

10. ***¿Qué nombre recibe esta identidad*?**

Actividades de aprendizaje

13. Completa el siguiente cuadro:

a	b	a^2	b^2	$a\,.\,b$	$(a\,.\,b)^2$	$a^2\,.\,b^2$
$-{}^1/_3$	${}^1/_4$					
${}^5/_2$				$-{}^{15}/_{16}$		
	${}^3/_2$	${}^{16}/_9$				

14. Completa el siguiente cuadro:

a	b	a^2	b^2	$(a+b)^2$	a^2+b^2
${}^2/_5$	${}^3/_{10}$				
${}^7/_2$			${}^{81}/_{16}$		
	${}^{25}/_{100}$	${}^{49}/_9$			
		${}^{36}/_{121}$			${}^{8068}/_{1089}$

11. ***Escribe una conclusión luego de completar el cuadro***

¿Recuerdas?

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

12. ***¿Qué nombre recibe esta identidad?***

Actividades de aprendizaje

15. Completa

$$(a+b).(\qquad) = a^2 - b^2$$

13. ***¿Qué nombre recibe esta identidad?***

16. Calcula aplicando las propiedades enunciadas anteriormente:

a) $(5x + y) \,.\, (5x - y) =$

b) $0{,}3^3 \,.\, 0{,}3^{-3} \,.\, 0{,}3 =$

c) $(5x + y)^2 =$

d) $(2 \,.\, a^2 \,.\, b^3 \,.\, c\,)^3 =$

e) $\left[\sqrt{0{,}2} - \sqrt{0{,}8}\right] . \sqrt{0{,}8} =$

f) $\sqrt[3]{0{,}075 : 3 + 0{,}04 : 0{,}4} =$

g) $\sqrt[6]{0{,}01^3} =$

h) $1000^{2/3} =$

17. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En este último caso justifica las respuestas proponiendo un contra ejemplo.

a) $a \,.\, 0 = 0$

b) $(-a) \,.\, (-b) = -(a \,.\, b)$

c) $a + (-b + c) = a - b + c$

d) $a : (b + c) = (a : b) + (a : c)$ siendo $b + c \neq 0$; $b \neq 0$ y $c \neq 0$

e) $a - (b + c) = a - b + c$

f) $(b + c) : a = (b : a) + (c : a)$ con $a \neq 0$

g) Si $a = -2$ y $b = 0$ entonces $a/b = 0$

h) El cociente entre un número y su opuesto es igual a -1

i) Si $a \in R$, entonces $a : a^{-1} = 1$

j) Si $a \in R$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$

k) $a \,.\, (-b) = a \,.\, b$

l) $a \,.\, (b - c) = a \,.\, b - a \,.\, c$

m) La ecuación $2x = 1$ tiene solución en $\boldsymbol{Z}$

n) $-(-a) = a$

18. Da contraejemplos mostrando que:

a) la potenciación no es conmutativa

b) la potenciación no es asociativa

19. Aplica las propiedades y reglas para demostrar que:

a) $(a+2)^2 - (a-2)^2 - 4(2a+1) = -4$

b) $(3\,.\,3^{n+1} + 3^{n+2})^3 : (3^{n+2})^3 = 8$

c) $(10\,.\,2^{n+1})^3 : (2^{n+1})^3 = 1000$

d) $2^{2-n}\,.\,(2\,.\,2^{n+1} + 2^{n+2}) = 32$

20. En los siguientes cálculos se han cometido errores al aplicar las propiedades. Se propone indicar cuáles son y corregirlos:

a) $(2^2\,.\,2^{-3}\,.\,2^5)^2 = (2^4)^2 = 16$

b) $(5^2)^4 : (5^{-3})^2 = 5^8 : 5^{-6} = 1^{14} = 1$

c) $\frac{7^4\,.\,(7^2)^6}{(7^2)^9} = \frac{7^4\,.\,7^{12}}{7^{18}} = 7^{-2} = (-7)^2 = 49$

d) $(7\,.\,2 - 14)^0 + 5^0 = 2$

21. Escribe **V** (verdadero) o **F** (falso), según corresponda. En caso de falsedad, justifica la respuesta.

a) $\sqrt{5+2} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$

b) $\sqrt{5\,.\,2} = \sqrt{5}\,.\sqrt{2}$

c) $\sqrt{(-3)^2} = -3$

d) $\sqrt{(-3)^2} = 3$

e) $\sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

f) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

22. Resuelve mentalmente:

a) $\frac{\sqrt{5}\,.\,\sqrt{2}\,.\,\sqrt{10}}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} =$

b) $\left(\frac{1}{2} + 2^{-1}\right)^{28} + \sqrt[3]{-8} =$

c) $\sqrt{3}\,.\,\sqrt{3} - \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{9}\right)^{-1} =$

El orden

Si quiero comparar dos expresiones decimales es necesario expresarlo de la misma forma.

- $0{,}5$ y $0{,}04$.
  Como $0{,}5 = 0{,}50$ entonces comparo $0{,}50 > 0{,}04$ y luego contesto $0{,}5 > 0{,}04$.
- $9{,}12$ y $9{,}135$
  $9{,}12 = 9{,}120$ entonces comparo $9{,}120 < 9{,}135$ y contesto $9{,}12 < 9{,}135$
- $0{,}00135$ y $0{,}005$ entonces comparo $0{,}00135 < 0{,}00500$ y contesto $0{,}00135 < 0{,}005$

Ordenamos de menor a mayor los siguientes números reales

$$0{,}6 \qquad 0{,}\hat{6} \qquad 0{,}\widehat{60} \qquad 0{,}606006000$$

conviene expresarlos con la misma cantidad de cifras decimales

$0{,}600000000$

$0{,}666666666$

$0{,}606060606$

$0{,}606006000$

por lo tanto: $0{,}6 < 0{,}606006000 < 0{,}\widehat{60} < 0{,}\hat{6}$

Redondeo

Desde la Escuela Primaria estás acostumbrado al "***redondeo***" de las cifras.

- He aquí algunos ejemplos de dichos redondeos:
  $0{,}23875 \to 0{,}239$ (Sumamos 1 a la última cifra conservada)
  $0{,}34562 \to 0{,}3456$ (Dejamos inalterada la última cifra conservada)

$$13{,}851395 \to 13{,}851$$

$$9{,}370541 \to 9{,}371$$

$$0{,}\hat{3} \to 0{,}333$$

$$0{,}1\hat{6} \to 0{,}1667$$

$$\pi = 3{,}14159 \ldots \to 31416$$

Es importante ***saber acotar el error***…

¿Cuál es el máximo error que se comete en la operación de redondeo?

Primer caso. Agregamos una unidad a la última cifra conservada si la primera omitida es mayor o igual que cinco. El máximo error lo cometemos justamente si la cifra omitida es cinco.

Si tomamos 0,01 en lugar de 0,005, el error es:

$$0{,}01 - 0{,}005 = 0{,}005$$

Si tomamos 0,2 en lugar de 0, 15 el error es:

$$0{,}2 - 0{,}15 = 0{,}05$$

Si tomarnos 0,03 en lugar de 0,0258 el error es:

$$0{,}03 - 0{,}0258 = 0{,}00185 < 0{,}005$$

Es decir que, en este caso, al efectuar el redondeo el error no excede de media unidad de la primera cifra no conservada.

Segundo caso: Conservamos inalterada la última cifra conservada si la que sigue es menor que cinco.

En el peor de los casos, la cifra despreciada será 4. Calculemos el error en los siguientes casos:

Si tomamos 0,28 en lugar de 0,284 el error es:

$$0{,}284 - 0{,}28 = 0{,}04 < 0{,}05$$

Si tomamos 13,743 en lugar de 13,74345 el error es:

$$13{,}74345 - 13{,}743 = 0{,}00045 < 0{,}005$$

Si tomarnos 0,47 en lugar de 0,47499 el error es:

$$0{,}47499 - 0{,}47 = 0{,}00499 < 0{,}005$$

Vemos que tanto en el primer caso corno en el segundo, el error cometido al redondear no excede de media unidad del orden de la cifra despreciada.

Actividades de aprendizaje

23.

	Redondeo a cuatro cifras		Redondeo a seis cifras	
	Aproximación	Diferencia entre el número y su aproximación	Aproximación	Diferencia entre el número y su aproximación
62,28125				
254,28571				
52,52				
0,123				
3,142347				

24. Ordene de menor a mayor los siguientes números reales:

a) Ordene de menor a mayor los siguientes números reales:

$$\frac{5}{6}; 0\widehat{75};\ 0{,}8384858687\ldots; 0{,}757507500\ldots; \frac{3}{4}; 0{,}7\hat{5};\ 0{,}838833888333\ldots;\ 0,\widehat{83}$$

b) Redondee a centésimos los números del inciso anterior y ordene nuevamente. ¿Qué diferencias encuentran?

c) ¿Cuántas cifras decimales se deben considerar como mínimo para diferenciar los números?

25. a) Calcula $(\varepsilon < 0{,}001)$ usando calculadora

$\sqrt{112{,}37} =$ $\quad R = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\sqrt[3]{125{,}72} =$ $\quad R = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\sqrt[7]{17{,}42} =$ $\quad R = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(-2{,}5)^4 =$

$1{,}7^{-3} =$

$3{,}1^4 =$

$0{,}71^3 =$

b) $\sqrt{4.100} - \left(\frac{1}{20}\right)^{-2} =$

¿Cómo se halla el número de granos de la última casilla del tablero de ajedrez del problema del principio de este material?

Para calcular ese número, ¿Es necesario hacer las multiplicaciones por 2?

Calcula: $2^{63} =$

Para hallar el número de granos de la última casilla del tablero de ajedrez habrá que calcular 2^{63}, pues esa es la cantidad de granos que contiene la última casilla del tablero.

En el manejo de números muy grandes como los de este problema, es más cómodo utilizar la ***"notación científica",*** pero para ello es necesario que realices las siguientes

Actividades de aprendizaje

26. Completa las siguientes igualdades y saca tus propias conclusiones:

$10^2 = 100$; $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$; $10^{-4} = \frac{1}{10000} = 0{,}0001$

a) $10^7 =$…………………….. d) $10^{-11} =$……………………..

b) $10^{-5} =$ ………………… e) $10^{10} =$……………………

c) $10^6 =$ …………………….. f) $10^{-8} =$……………………

Conclusiones: ……………………………………………………………………………………….

27. Escribe como potencia de 10:

$100 = 10^2$ $0{,}1 = 10^{-1}$

a) $10000 =$ e) $0{,}0001 =$ i) $100000000 =$

b) $100000 =$ f) $0{,}0000001$ j) $100000000000000 =$

c) $1000000000 =$ g) $0{,}001 =$ k) $0{,}0000001 =$

d) $10000000 =$ h) $0{,}0000000001 =$ l) $0{,}000000000001 =$

28. Calcula:

a) $16{,}54 \cdot 100 =$

b) $0{,}036 \cdot 1000 =$

c) $0{,}5432 \cdot 100 =$

d) $43{,}63 \cdot 100 =$

e) $3{,}67 \cdot 10 =$

f) $5{,}4 \cdot 100000 =$

g) $12 \cdot 100000 =$

h) $78{,}5 \cdot 10000 =$

i) $5 : 100000000 =$

j) $76 : 10000 =$

k) $36{,}789 \cdot 100 =$

l) $54{,}216 \cdot 1000 =$

m) $123{,}45 \cdot 10000 =$

n) $32{,}964 : 1000 =$

ñ) $357{,}888 : 100 =$

29. Completa con la palabra que falta:

a) Para hallar el producto entre una expresión decimal y la unidad seguida de ceros, se corre la coma hacia la …………………… como ceros siguen en la unidad.

b) Para hallar el cociente entre una expresión decimal y la unidad seguida de ceros, se corre la coma hacia la …………………… como ceros le siguen a la unidad.

Notación científica

Es frecuente leer en el diario noticias como la que aparece a continuación:

> ***"El Banco Mundial otorgó a la Argentina un préstamo por tres mil millones de dólares"***

Si queremos utilizar números para simbolizar esta cantidad, escribimos:

$$3\,000\,000\,000$$

Muchas veces, puede no resultar cómodo escribir números tan grandes.

Veamos si encontramos una ***forma*** más abreviada para expresarlos.

Para esto, escribamos previamente algunas potencias de 10. Observa:

10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001

Resulta entonces que:

$$3\ 000\ 000\ 000 = 3\ .\ 1\ 000\ 000\ 000 = 3\ .\ 10^{9}$$

- ¿Sabías que el diámetro de un átomo de hidrógeno es 0,0000001 mm?

  Veamos cómo escriben este número los científicos:

$$0{,}0000001\ mm = \frac{1}{10\ 000\ 000} = \frac{1}{10^{7}} = 1\ .\ 10^{-7} = 10^{-7}$$

- ¿Sabías que el tiempo que tarda la luz en atravesar el vidrio de una ventana es de 0,000000000013 segundos?

$$0{,}000000000013 = \frac{13}{1\ 000\ 000\ 000\ 000} = \frac{13}{10^{12}} = 13\ .\ 10^{-12} =$$

$$= 1{,}3\ .\ 10\ .\ 10^{-12} = 1{,}3\ .\ 10^{11}$$

A esta manera de escribir los números se la llama ***notación científica***.

Un número está expresado en notación científica cuando se lo escribe de la forma: $\boldsymbol{p\ .\ 10^{k}}$ *, donde* ***p*** *es un número decimal, cuyo valor absoluto es mayor o igual que* **1 y** *menor que* **10**, y ***k*** *es un número entero.*

Actividades de aprendizaje

30. En el cerebro hay más de catorce mil millones de neuronas. Escribe este número en notación científica.

31. La unidad de distancia que se utiliza en astronomía es un año luz, que es la distancia que recorre la luz en un año. Un año luz es aproximadamente igual a $9{,}46.10^{12}$. *Comprobar sabiendo que la velocidad de la luz es de 3.10*^{5} *km/s.*

32. La galaxia de Andrómeda, que es el objeto más distante del cosmos que puede observarse a simple vista desde la Tierra, está ubicada a unos 2 300 000 años luz de distancia.

¿A cuántos millones de kilómetros de la Tierra, aproximadamente, está esta galaxia? Escribe esta distancia en notación científica.

33. Durante una lluvia de meteoros cayeron a la atmósfera terrestre $4{,}2\,.\,10^{10}$ kilogramos de polvo interplanetario en un día.

¿Cuántos kg. de ese polvo hubieran caído en una semana de lluvia meteórica?

34. El espesor de todas las hojas de un libro de 500 páginas es de 1,788 centímetros. Expresa en notación científica el espesor aproximado de una hoja. (Recuerda que una hoja consta de dos páginas).

En las calculadoras científicas, las respuestas expresadas en notación científica, por ejemplo:

$2{,}345.\ 10^{12}$, aparece en el visor

2	**.**	**3**	**4**	**5**		**1**	**2**

Primer factor

signo del exponente
(es $+$, por eso no aparece)

exponente de la potencia de diez

14. ***Explica cómo se hace para escribir en la calculadora ese número dado en notación científica.***

Actividades de aprendizaje

35. Anotar las lecturas de los visores:

a)

2	**.**	**7**	**8**	**5**	**–**	**1**	**3**

b)

	4	**.**	**6**	**9**		**0**	**3**

c)

–	**6**	**.**	**7**	**6**	**–**	**0**	**5**

d)

		8	**.**	**6**		**1**	**0**

36. Realiza las siguientes operaciones con calculadora y anota lo que se lee en el visor:

a) $1678700000\,.\,360 =$

es la expresión decimal de: ……………………………………

b) $3 : 890000000 =$

es la expresión decimal de: ……………………………………..

Si tenemos que realizar el ***producto*** de números expresados en notación científica, se procede como en los siguientes ejemplos:

$3{,}8\,.\,10^{7}\,.\,2\,.\,10^{6} = (3{,}8\,.\,2\,)\,.\,10^{7}\,.\,10^{6} = 7{,}6\,.\,10^{13}$

$4{,}8\,.\,10^{-6}\,.\,5\,.\,10^{-3} = (4{,}8\,.\,5\,)\,.\,10^{-6}.\,10^{-3} = 24{,}0\,.\,10^{-9} = 2{,}4\,.\,10\,.\,10^{-9} = 2{,}4\,.\,10^{-8}$

15. ¿*Qué diferencia existe entre el primer y segundo ejemplo*?

Actividad de aprendizaje

37. Realiza los siguientes productos de números expresados en notación científica:

a) $16600000\,.\,43250000 =$

b) $-0{,}000000342\,.\,454000000 =$

c) $0{,}0000348\,.\,0{,}000897 =$

d) $0{,}0054\,.\,0{,}0001\,.\,0{,}0874 =$

Vamos a hallar el ***cociente*** entre dos números expresados en notación científica:

$$\frac{0{,}000000081}{3000000} = \frac{8,1\,.\,10^{-8}}{3\,.\,10^{6}} = \frac{8,1}{3}\,.\,\frac{10^{-8}}{10^{6}} = 2{,}7\,.\,10^{-14}$$

$$\frac{600\,.750000000}{0{,}000003} = \frac{6\,.\,10^{2}\,.7{,}5\,.\,10^{8}}{3\,.\,10^{-6}} = \frac{6\,.7{,}5}{3}\,.\,\frac{10^{2}\,.\,10^{8}}{10^{-6}} =$$

$$= 15\,.\,10^{16} = 1{,}5\,.10.\,10^{16} = 1{,}5\,.\,10^{17}$$

Actividades de aprendizaje

38. Realiza los siguientes cálculos usando notación científica:

a) $\dfrac{165800000\ .\ 0{,}00019}{20000} =$ b) $\dfrac{6500000\ .\ 0{,}00004}{0{,}00008\ .\ 0{,}0876} =$

39. El átomo de oxígeno pesa $2{,}66\ .\ 10^{-23}$g. ¿Cuántos átomos habrá en 16g. de oxígeno?

Para realizar las ***potencias*** podemos expresar primero el número en notación científica:

$$(0{,}0008)^2 = (8\ .\ 10^{-4})^2 = 8^2\ .\ 10^{-8} = 64\ .\ 10^{-8} = 6{,}4\ .\ 10^{-7}$$

$$(700000)^3 = (7\ .\ 10^5)^3 = 7^3\ .\ 10^{15} = 343\ .\ 10^{15} = 3{,}43\ .\ 10^{17}$$

15. *¿Qué propiedades de la potenciación se aplicaron*?

Actividad de aprendizaje

40. Calcula aplicando notación científica:

a) $125^2 =$ b) $0{,}003^5 =$ c) $\dfrac{250\ .\ 0{,}003^3}{0{,}04^5} =$

La relación entre fórmula y gráfico cartesiano para situaciones de dominio continuo y dominio discreto, permitirá aplicar el estudio de los conjuntos numéricos, sus operaciones y propiedades.

Las funciones describen fenómenos

¿Qué relación hay entre una función y su gráfica?

Recordar que la función se representa mediante una gráfica sobre unos ejes llamados ***ejes coordenados.***

Al eje horizontal se le suele llamar eje ***x*** o ***eje de abscisas.*** Sobre él se sitúa la variable independiente.

Al eje vertical se le suele llamar eje ***y*** o ***eje de ordenadas.*** Sobre él se sitúa la variable dependiente.

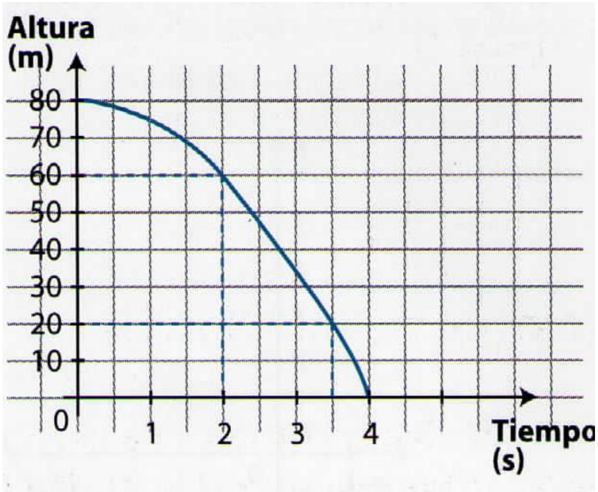
Para situar las variables sobre los ejes, hay que dar una escala en cada uno de ellos.

Ejemplo

Si se quiere describir con una función la caída de una piedra, desde que se deja caer desde un edificio de la misma altura, por ejemplo, 80 metros, hasta que alcanza:

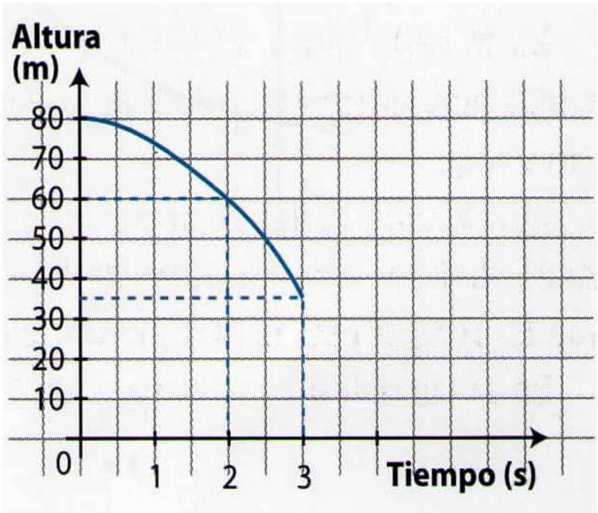
1) el suelo.

2) una altura de 35 metros.



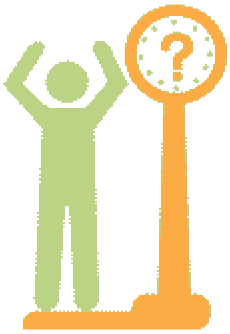
La fórmula que se debe utilizar es $h(t) = 80 - 5t^2$, pero el dominio de la función como puede verificarse al observar los gráficos, en el caso 1) es el intervalo $[0;4]$ y en el 2) es el intervalo $[0;3]$.

La imagen para el caso 1) es el intervalo $[0;80]$ y para el 2) el intervalo $[35;80]$.



La función que corresponde a este cambio de altura tienen dominio e imagen distintos. Ambos gráficos son distintos, aun cuando las dos funciones se pueden representar con la misma fórmula.

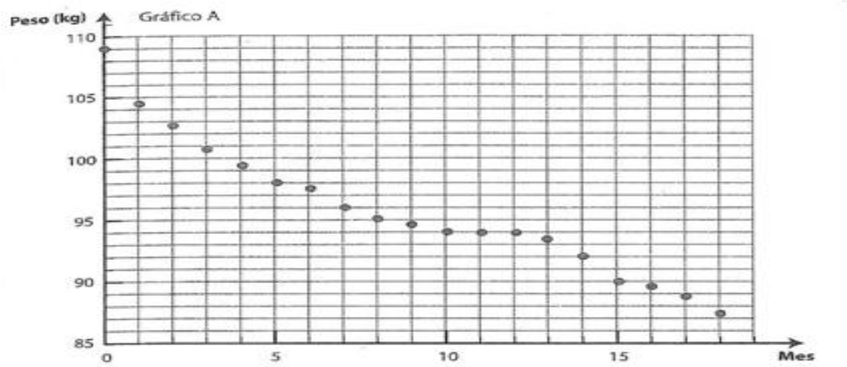
16. ***¿Siempre se anotan entre corchetes los intervalos de números reales?***

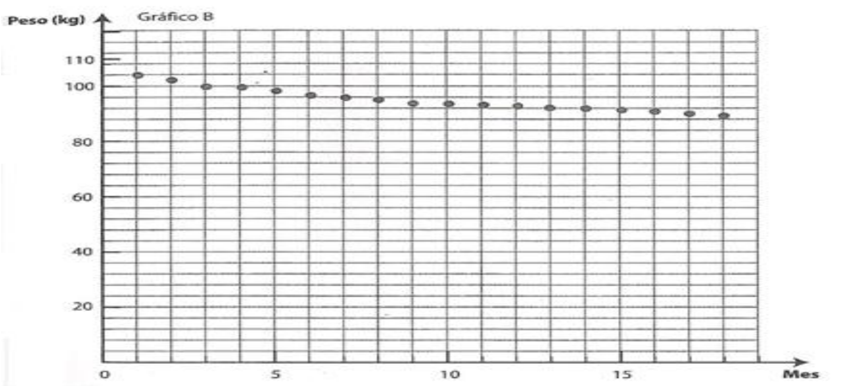


Se quiere estudiar la evolución del peso de un paciente en una clínica especializada en problemas de obesidad. Para ello, se registra el valor del peso cada mes y se disponen los datos en forma de tabla.

Al finalizar el tratamiento, se decide representar dichos datos en un gráfico, con el fin de analizar la forma en que bajó de peso y si fue eficaz el tratamiento.

Se representaron los mismos datos en dos gráficos distintos.





En esta situación, se puede observar cómo la elección de distintas escalas para el eje ***y****, hace que parezca diferente la misma información.*
Los gráficos A y B contienen la misma información.
Sin embargo, no lo parece.
Observando el gráfico B, puede parecer que la persona apenas bajó de peso; en cambio, el gráfico A muestra una marcada disminución.

¿A qué se debe la diferencia entre el gráfico B y el gráfico A?

La escala utilizada en el segundo gráfico, sobre el eje vertical, hace que la imagen esté contenida en un intervalo muy pequeño, lo que produce un efecto de poca variación del peso.

En cambio, en el primer gráfico, la imagen ocupa casi todo el semieje vertical, por lo que parece que la disminución del peso es mucho mayor.

¡*Pero la disminución del peso no varía*!

Este tipo de recurso gráfico se suele utilizar en publicidad, con la intención de exagerar virtudes o defectos de lo que se presenta.

Planteamiento al abordar funciones

Las preguntas más interesantes sobre las funciones son:

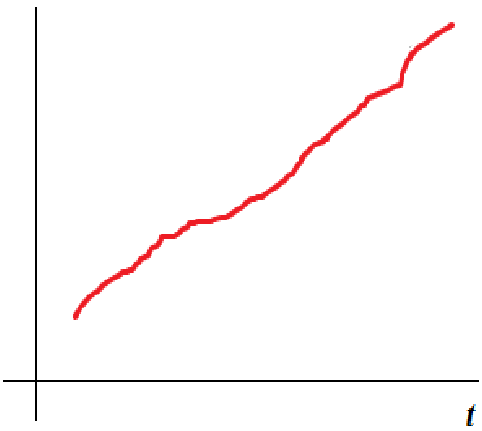
- ¿Qué representación se les puede dar para tener una mejor idea de sus características y de su significado?
- ¿Qué tipo de funciones son las que más aparecen?
- ¿Para qué valores de la variable independiente resulta que la variable dependiente va creciendo o decreciendo...?
- ¿Cómo es el crecimiento de la función, rápido, lento? ¿Cómo medir el crecimiento?
- ¿Para qué valor de la variable independiente tiene la variable dependiente su máximo valor o mínimo valor?
- ¿Qué pasa con la función o variable dependiente cuando la variable independiente crece indefinidamente haciéndose tan grande como se quiera?

Algunas de estas cuestiones las verás en los próximos temas ...

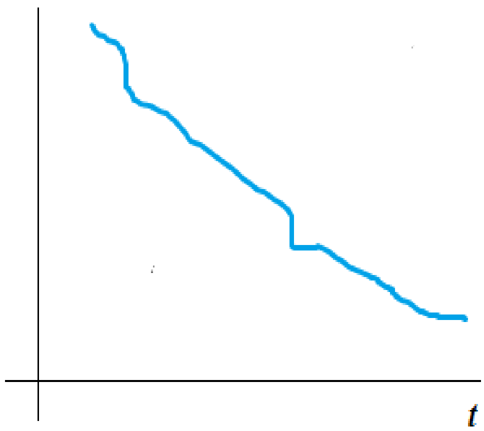
Las funciones y sus gráficas

Hay en el lenguaje de la calle muchas expresiones que se utilizan con frecuencia que están tomadas del mundo de la representación de funciones. Te vendrá muy bien tener una idea gráfica aproximada en la imaginación de lo que significa. Una imagen vale más que mil palabras.

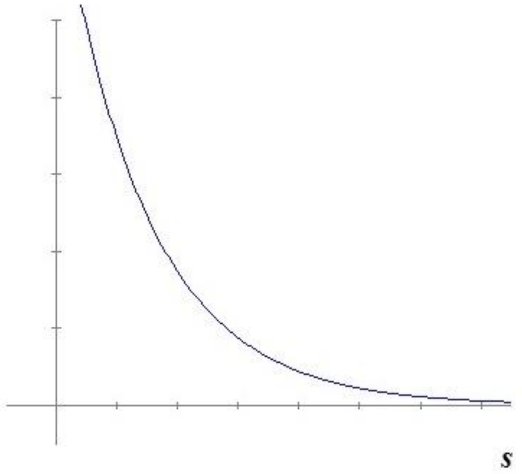
Esta magnitud crece con el tiempo:



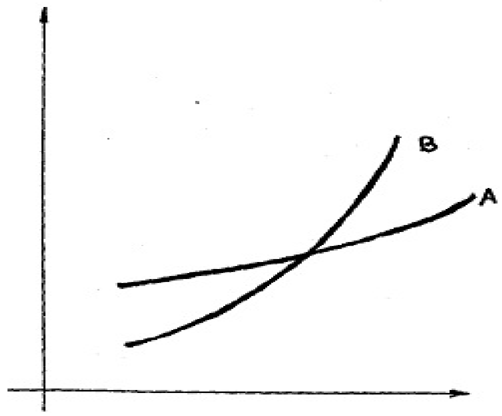
Esta otra decrece con el tiempo:



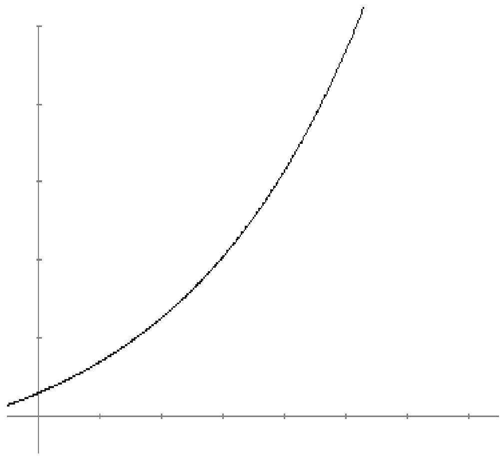
La magnitud ***y*** es inversamente proporcional a la ***s***



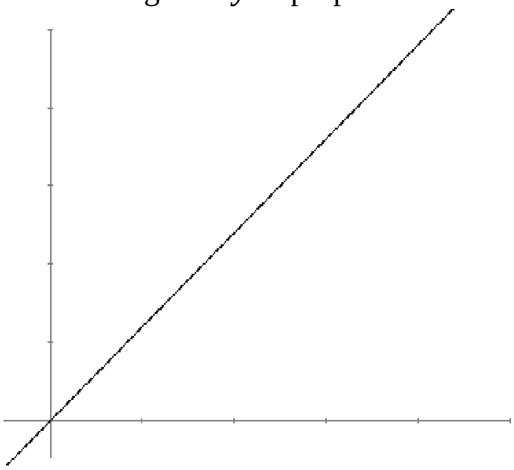
La magnitud ***B*** crece más rápidamente que la magnitud ***A***



Esta magnitud crece exponencialmente:

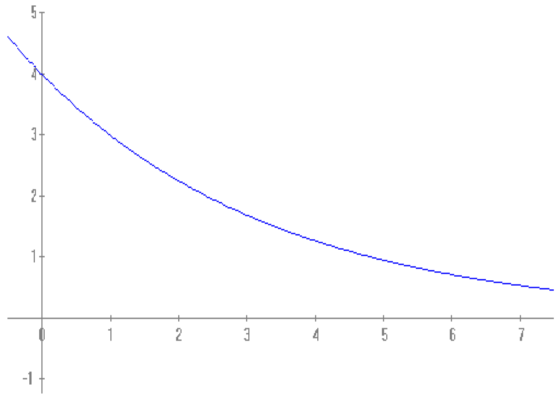


La magnitud ***y*** es proporcional a la ***x***:



Aclaración:

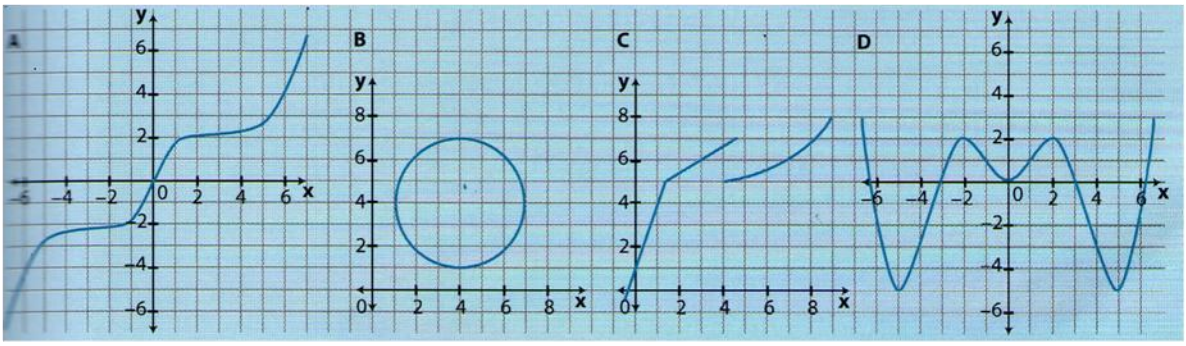
Esta otra, decrece exponencialmente:



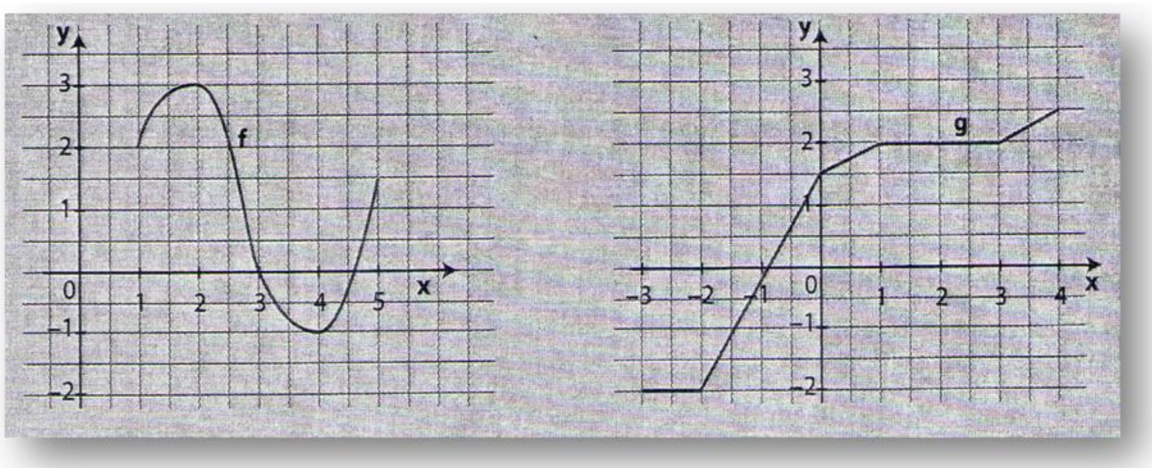
Al finalizar el estudio de funciones entenderás mejor estas ***gráficas***

Actividades de aprendizaje

41. Indica si los siguientes gráficos corresponden a funciones. Justifica las respuestas.



42. Para las funciones representadas, calcula, a partir de su gráfico, los valores que se indican.



a) $f(1)$; $f(2)$; $f(2{,}5)$; $f(4)$; $f(5)$

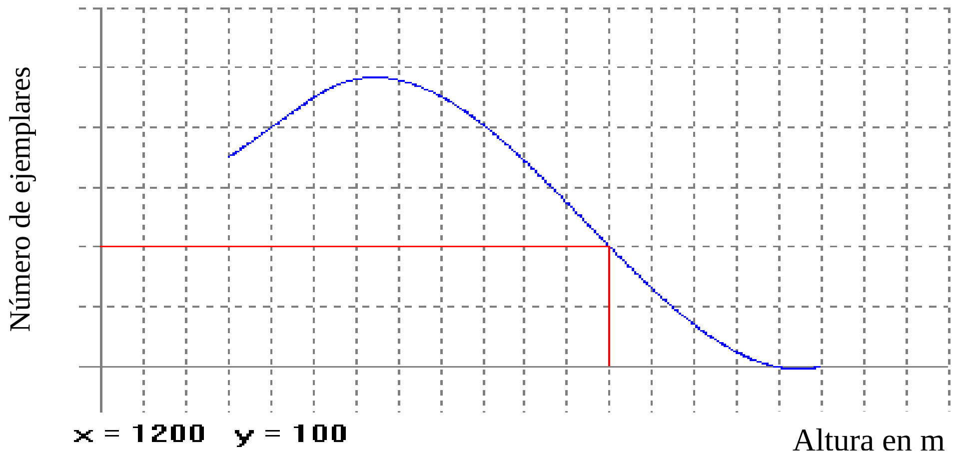
b) Los valores de $\boldsymbol{x}$ tales que $f(x) = 0$

c) $g(-1{,}5)$; $g(-0{,}5)$; $g(0)$; $g(0{,}5)$; $g(4)$

d) Los valores de $\boldsymbol{x}$ tales que $g(x) = 2$

e) Los valores de $\boldsymbol{x}$ tales que $g(x) = -2$

43. En una cierta región hay una especie vegetal que aparece con frecuencia. Se ha estudiado la cantidad media aproximada de ejemplares por hectárea que hay a distintas alturas. A la vista de esta gráfica, intenta describir la influencia de la altura sobre esa especie vegetal. Para ello, debes ir contestando a estas preguntas y elabora, con tus respuestas, un pequeño ***informe.***



a) ¿Cuáles son las variables que se relacionan? ¿Cuál es la independiente y cuál la dependiente?

Ambas variables son ***cuantitativas.*** ¿Por qué?

b) En el eje horizontal la escala es: una unidad ↔ 100 m . ¿Cuál es la escala en el eje vertical?

c) La gráfica pasa por el punto (1200; 100) que aparece señalado. Esto significa que en esa región, a 1200 m de altura, se encuentras unos 100 ejemplares por hectárea. Explica lo que significa que la gráfica pase por: (500; 225).

d) ¿A qué altura hay aproximadamente 200 ejemplares por hectárea?

e) ¿Cuántos ejemplares cabe esperar a 2000 metros de altura?

f) La región estudiada, ¿está por encima de los 350 m sobre el nivel del mar? ¿En qué te fijas para averiguarlo?

44. Para una experiencia de Biología, se midió el largo y el ancho de las hojas de una rama y se obtuvieron los datos que aparecen en la tabla. Tener en cuenta que el largo y el ancho de las hojas de una rama cualquiera siempre guardan el mismo tipo de relación.

Largo (m)	Ancho (cm)
6,5	5
6,2	4,8
5,6	4,1
5,1	3,9
4,5	3,5

a) Representa los datos de la tabla en un gráfico cartesiano.
b) Dibuja una curva que los aproxime.

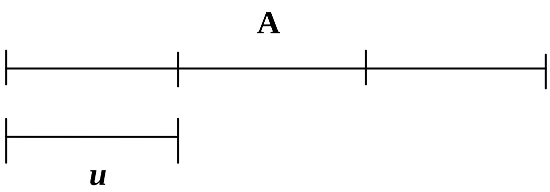
La fórmula, los gráficos, necesitan una cierta elección de unidades para las magnitudes que se relacionan y que, la misma situación con otra elección de unidades "llevaría" a una fórmula o gráfico diferente, por lo tanto revisaremos esos conceptos para poder utilizarlos correctamente.

Una de las primeras necesidades del hombre relacionadas con la matemática, además de la de contar; fue la de ***medir.***

¿Qué es medir?

Medir una cantidad **A**, significa compararla con la cantidad homogénea ***u*** elegida como unidad. Al compararlas obtenemos la medida de **A**, o sea el número de veces que ***u*** está contenida en **A**.

Ejemplo



Med **A**. = 3

EL SI.ME.L.A.

Sistema métrico legal argentino.

Fue necesario uniformar el uso de unidades para facilitar la ***comparación de cantidades y la interpretación de resultados.***
Si bien el sistema enumera una extensa lista de unidades, nos limitaremos a mencionar las más usuales en laboratorio. Por ejemplo, para unidades de longitud son:

- metro (m)
- centímetro (cm)
- milímetro (mm)

$$micrón\ (\mu) \qquad 1\ \mu = 10^{-3} mm$$

$$milimicrón\ (m\mu) \qquad 1\ m\mu = 10^{-3}\ \mu = \ 10^{-6}\ mm$$

$$Angstron\ (A) \qquad 1\ A = 10^{-4}\ \mu = 10^{-7}\ mm$$

Recordemos las unidades, múltiplos y submúltiplos correspondientes a distintas magnitudes:

Longitud

	MÚLTIPLOS			UNIDAD	SUBMÚLTIPLOS		
	Kilómetro	Hectómetro	Decámetro	Metro	Decímetro	Centímetro	Milímetro
Símbolo	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
Valor en m	$1000=10^{3}$	$100=10^{2}$	$10=10^{1}$	$1=10^{0}$	$0{,}1=10^{-1}$	$0{,}01=10^{-2}$	$0{,}001=10^{-3}$

Superficie

Para medir superficies, se considera como unidad de área al metro cuadrado (m^2) . Es un cuadrado de un metro de lado.

Los múltiplos y submúltiplos son las áreas de los cuadrados que tienen por lados a los múltiplos y submúltiplos del metro: kilómetro cuadrado (km^2), decímetro cuadrado (dm^2); etcétera.

$$1\ cm^2 = 1\ cm\ .\ 1\ cm = 0{,}01\ m\ .\ 0{,}01 m = 0{,}0001\ m^2 = 10^{-4}\ m^2$$

$$1\ dam^2 = 1\ dam\ .\ 1\ dam = 10\ m\ .\ 10\ m = 100\ m^2 = 10^2\ m^2$$

$$1\ hm^2 = 1\ hm\ .\ 1\ hm = 100\ m\ .\ 100\ m = 10000\ m^2 = 10^4\ m^2$$

Volumen

Para medir volúmenes, se considera como unidad de volumen, al metro cúbico (m^3). Es un cubo de 1 metro de arista.

Los múltiplos y submúltiplos son los volúmenes de los cubos que tienen por arista a los múltiplos y submúltiplos del metro: decímetro cúbico (dm^3), centímetro cúbico (cm^3); etcétera.

$$1\ dm^3 = 1\ dm\ .\ 1\ dm\ .\ 1\ dm = 0{,}1\ m\ .\ 0{,}1\ m\ .\ \ 0{,}1\ m = 0{,}001\ m^3 = 10^{-3}\ m^3$$

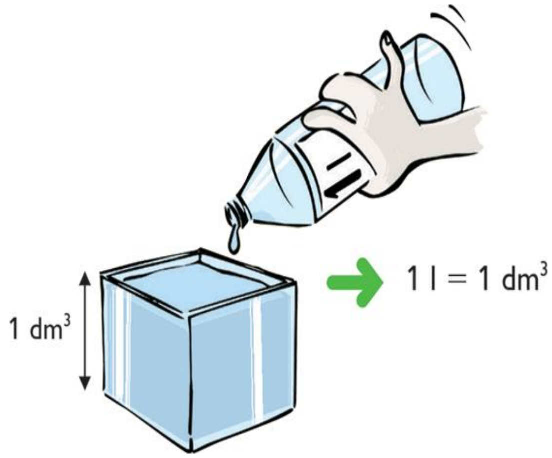
$$1\ dam^3 = 1\ dam\ .\ 1\ dam\ .\ 1\ dam = 10\ m\ .\ 10\ m\ .\ 10\ m = 1000\ m^3 = 10^3\ m^3$$

Capacidad

La capacidad mide el espacio libre que tiene un cuerpo. El **SI. ME. L. A** establece como unidad de capacidad el ***litro***, que es la capacidad de un cubo de $1\ dm$ de arista $(1\ dm^3)$.

Ya sabes que los múltiplos del litro son el decalitro $(10\ l)$, el hectolitro $(100\ l)$ y el kilolitro $(1000\ l)$.

También recordarás que los submúltiplos son el decilitro $(0{,}1\ l)$, el centilitro $(0{,}01\ l)$ y el mililitro $(0{,}001\ l)$.



De acuerdo con la definición de litro, es evidente que $1\ litro$ equivale a $1\ dm^3$.

a) ¿Cuántos litros tiene $1\ cm^3$?

b) ¿Y $1\ m^3$?

Agraria

Es común expresar las medidas de la superficie de los campos mediante las llamadas ***unidades agrarias***.

Estas son:

	MÚLTIPLOS	UNIDAD	SUBMÚLTIPLOS
Nombre	Hectárea	Área	Centiárea
Símbolo	ha	a	ca
Valor en m^2	10000	100	1
Equivalencia	hm^2	dam^2	m^2

Masa

Por la mala manera de hablar que enoja a muchos de los profesores de Física, usamos la palabra “***peso***” en lugar de la palabra “***masa***”.

	Nombre	Símbolo	Valor en gramos
Unidad	gramo	g	1
Múltiplos	tonelada	t	10^6
	quintal	q	10^5
	kilogramo	kg	10^3
	hectogramo	hg	10^2
	decagramo	dag	10^1
Submúltiplos	decigramo	dg	10^{-1}
	centigramo	cg	10^{-2}
	miligramo	mg	10^{-3}

Actividades de aprendizaje

45. Halla la capacidad en litros de un cubo de 6 dm. de arista.

a) ¿Cuántos decalitros hay en 1 m^3?

b) ¿Caben 25 litros de agua en un cubo que tiene 3 dm. de arista?

46. Completa para que se verifique la igualdad:

a) $38{,}1\ mm = 3{,}81\ .\ 10^{-4}$ … …

b) $4{,}27\ .\ 10^{5}\ m^2 = 0{,}427$ … …

c) $216{,}54\ dm^3 = 2{,}1654\ .\ 10^{8}$ … …

d) $12568\ cm^2 = 1{,}2568$ … …

47. Según datos de un especialista en riego suplementario en praderas y cultivos alternativos, figura que en la República Argentina, durante el período de ordeñe se utilizan 20 000 litros de agua por ha. en el lavado de estiércoles. ¿A cuánto equivale este dato, en milímetros de agua por hectárea?

¿Lo consideras significativo, si se tiene en cuenta que en Chile, es de 40 milímetros por ha.?

48. Un nanometro es la millonésima parte de un milímetro. Utilizando notación científica, escribe el equivalente a 1 nm en mm, en m y en km.

49. Suponiendo que una célula es circular y que su diámetro mide 15,2 micrones, calcule su perímetro en decímetros y expréselo en notación científica.

50. Sabiendo que el volumen del glóbulo rojo de cobayo es de $7{,}9.\ 10^{-10}$ μl.

a) Expresar el volumen en ml.

b) Calcular la cantidad de glóbulos contenidos en un volumen de 1 litro.

51. Calcular la densidad del alcohol etílico si 63 g ocupan 80 ml. Exprese en kg/m^3.

52. ¿Cuál es la densidad de la materia contenida en el núcleo del átomo de hidrógeno?. Puede suponerse que el núcleo es una esfera de radio $1{,}2.\ 10^{-15}$ m y su masa es de $1{,}67.10^{-27}$ kg. El volumen de la esfera es $4/3\,\pi\, r^3$.

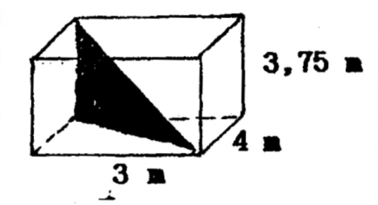
53. En un libro de Ciencias Biológicas, encontramos el siguiente texto: “Si pusiéramos diez millones de átomos en fila india, su longitud sería de un solo milímetro”.

¿Cuántos átomos podríamos colocar en una fila de un metro? Expresa en notación científica.

54. Una habitación mide 3 m de ancho, 4 m de profundidad y 3,75 m de alto. Con sombreado se ha marcado la diagonal de la habitación. Calcula, utilizando la propiedad de Pitágoras, la medida de:

a) La diagonal del piso.

b) La diagonal de la habitación.



17. ***Escribe el enunciado del teorema de Pitágoras***

55. Un acuario que tiene 3/5 m de largo, 1/3 m de ancho y 1/3 m de alto se llena de agua hasta su 4/5 partes.

¿Cuántos litros de agua se necesitan?

56. Averigua la diferencia de peso del contenido de un recipiente de 3 litros de capacidad cuando se lo llena con leche de peso específico $1{,}03\,\frac{\overrightarrow{kg}}{dm^3}$ y cuando se lo llena con hielo cuyo peso específico es $0{,}916\,\frac{\vec{g}}{cm^3}$.

(Recordar que $\rho = \frac{P}{V}$ siendo ρ el peso específico, *P* el peso y *V* el volumen).

57. En una caja de 60 cm de largo por 24 cm de ancho y 20 cm de altura, se quieren acomodar cilindros de 5 cm de diámetro por 12 cm de altura.

a) ¿Cuál es la forma más conveniente de ubicarlos para que quepa el mayor número de cilindros?

b) ¿Cuántos cilindros caben en la caja?

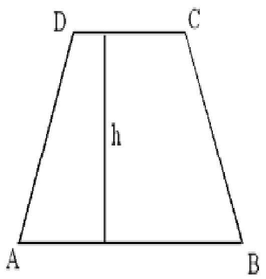
c) ¿Cuál es el volumen de los espacios libres?
(Recuerda: $Volumen\ del\ cilindro = \pi\,.\,r^2\,.\,h$)

d) Expresa en litros la capacidad de cada cilindro.

18. ***Explica brevemente como hiciste para elegir la posición conveniente***

58. ¿Qué peso lleva un camión que transporta 95 bolsas de trigo de 68 kg. cada una y 67 de cebada de 54 kg. cada una?
Expresa la respuesta en quintales.

59. El trapecio ABCD de la figura tiene las siguientes dimensiones:



AB = 2 *km*

DC = 1 *km*

AD = BC = 1,3 *km*

Hallar el área del mismo. ¿Cuántas hectáreas tiene?

60. Un terreno cuadrado tiene un área de 5,76 ha. ¿Cuál es la medida del lado en m?

61. El ser más pequeño es un virus que pesa del orden de $10^{-18} g$ y el más grande es la ballena azul, que pesa aproximadamente $1{,}35 \cdot 10^{5}\ kg$.

¿Cuántos virus serán necesarios para construir el peso de la ballena?.

Expresa el resultado en notación científica.